

采用时域平衡描述函数法求解含非线性能量阱 的机翼颤振系统*

赖丞, 郑泽昌, 陈衍茂

中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107

摘要: 采用一种时域平衡描述函数法 (DFBT), 高效求解含非线性能量阱 (NES) 的二元机翼颤振系统。该方法采用一组用于描述周期运动的基函数, 在时域上将动力学方程离散并逐点列出平衡方程, 以此求解出基函数的谐波系数。通过离散得到的逐点平衡方程提供超定代数方程组, 结合最小值优化使得迭代容易收敛, 从而实现谐波系数的求解。该方法无需对周期响应进行频繁的时频域转换, 提高了计算效率。求解结果与数值方法的计算结果吻合良好, 验证了方法的有效性。同时, 由于 DFBT 结果具有半解析形式, 可以得到颤振系统的非稳定解, 获得了完整的亚临界分岔图。因此, DFBT 适用于复杂非线性多自由度颤振系统的稳态响应求解。

关键词: 非线性颤振系统; 极限环; 非线性能量阱; 半解析方法

中图分类号: V21 文献标志码: A 文章编号: 2097-0137 (2024) 03-0147-07

Describing function method with balancing in time domain for 2-DOF airfoil system with nonlinear energy sink

LAI Cheng, ZHENG Zechang, CHEN Yanmao

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China

Abstract: A describing function method with balancing in time domain (DFBT) is used to efficiently solve 2-DOF airfoil system with nonlinear energy sink (NES). This method uses a set of basis functions to describe the periodic motion, discretizes the dynamic equation in time domain and lists the equilibrium equation point by point to solve the basis function and obtain the harmonic coefficient. The point-by-point equilibrium equation obtained by discretization can provide overdetermined algebraic equations for solving harmonic coefficients, and the iterative convergence can be easily combined with minimum optimization. The method does not need to switch the time-domain and frequency-domain responses of the nonlinear system frequently, which brings convenience to the solution. The results of the solution agree well with those of the numerical method, which verifies the effectiveness of the method. At the same time, due to the semi-analytic form of DFBT results, the unsteady solution of the flutter system and the complete subcritical bifurcation diagram can be obtained. Therefore, DFBT is suitable for solving the steady-state response of multi-degree-of-freedom flutter systems with complex nonlinearity.

Key words: nonlinear flutter system; limit cycle; nonlinear energy sink; semi-analytic method

* 收稿日期: 2023-11-02 录用日期: 2023-11-30 网络首发日期: 2024-01-24

基金项目: 国家自然科学基金 (12172387)

作者简介: 赖丞 (1998 年生), 男; 研究方向: 非线性动力学; E-mail: laich7@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 陈衍茂 (1982 年生), 男; 研究方向: 非线性动力学; E-mail: chenymao@mail.sysu.edu.cn

非线性系统难以得到解析解, 甚至有些含有复杂非线性的系统是无法得到解析解的。研究者使用各种数值方法求解非线性系统的动力响应, 例如: Runge-Kutta 法 (He et al., 2016)、精细积分法 (Zhong et al., 2000) 和 Newmark- β 法 (Ma et al., 2023)。然而, 非线性系统还具有多解的特性。这导致在求解含有多个解的系统时, 数值方法只能得到其中的稳定解, 无法得到不稳定的稳态解。为了深入分析非线性系统的分岔, 半解析方法 (刘广等, 2018; 王德亮等, 2023) 提供了一种选择, 它可以得到稳定解和不稳定解 (Zheng et al., 2022)。目前, 半解析方法的求解大多是基于谐波平衡技术 (Chen et al., 2012; Huang et al., 2017) 和增量迭代的方式 (Clarke et al., 1990), 虽然可以得到满足精度的半解析解, 但其求解过程非常繁琐且效率不高, 还存在谐波系数收敛域过小的问题 (Liao et al., 2004)。若是处理非光滑系统, 则还需光滑化处理 (Liu et al., 2012), 这会降低半解析解的精度。最近, 时域点平衡描述函数法被提出来解决非光滑自激系统 (Zheng et al., 2023)。与增量谐波平衡法 (Hall et al., 2013) 和时域最小残值法 (Liu et al., 2022) 相比, DFBT 具有更好的收敛性能, 且显著简化了平衡方程的推导过程。

由粘性阻尼和线性弹簧耦合构成的调谐减震器, 已经被证明能够有效缓解特定频率下的无阻尼振动 (Yang et al., 2022)。其中, 具有代表性的设计是非线性能量阱。非线性能量阱是一种没有线性刚度的非线性振子, 因其优秀的被动减振而受到广泛关注 (Vakakis, 2001), 在许多研究中被提出用于飞机机翼的减振 (Pidaparthi et al., 2018)。对于含有非线性能量阱的二元机翼系统, 学者多使用谐波平衡法进行颤振分析并对 NES 的参数进行了研究 (Guo et al., 2013, 2018)。本文使用一种更加快速有效、更容易收敛的时域点平衡描述函数法, 求解含非线性能量阱的二元机翼系统, 为非线性颤振控制提供理论基础。

1 时域平衡描述函数法

1.1 方法介绍

以非线性自激系统为例, 介绍时域点平衡描述函数法的步骤。假设非线性自激系统的形式为

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \quad (1)$$

其中 x 为状态变量, A 为线性矩阵。设 $x(t)$ 是该方程的一个周期为 T 的解, 系统的振动频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$, t 属于区间 $[0, T]$ 。

为了求解系统的周期响应, 引入了无量纲变量 $\tau = \omega t$, 式(1)变为

$$\omega x' = Ax + f(x). \quad (2)$$

周期解 $x(\tau)$ 和 x' 可以表示为截断的傅里叶级数:

$$\begin{cases} x(\tau) = c_i^0 + \sum_{k=1}^N [c^k \cos k\tau + s^k \sin k\tau] = p(\tau) \mathbf{a}, \\ x'(\tau) = \sum_{k=1}^N [-kc^k \sin k\tau + ks^k \cos k\tau] = p'(\tau) \mathbf{a}, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{p} = [1, \cos \tau, \sin \tau, \dots, \cos(N\tau), \sin(N\tau)], \\ \mathbf{a} = [c^0, c^1, s^1, \dots, c^N, s^N]^T. \end{cases} \quad (4)$$

当 N 趋于无穷时, $x(\tau)$ 是系统的精确解。取一个有限值 N , 得到的 $x(\tau)$ 称之为近似解。求解 x 必须先解出傅里叶系数 \mathbf{a} , 本文将采用点平衡的方法得到未知参数的非线性代数方程。将 τ 均匀离散成 m 个部分代入 x , 可得到离散信号 \mathbf{X} :

$$x(\tau, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{a}), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mathbf{X}: \mathbb{R}^m. \quad (5)$$

类似地, 将 $1 \times (2N + 1)$ 的向量 \mathbf{p} 转变成 $m \times (2N + 1)$ 矩阵 \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \cos 0 & \sin 0 & \cdots & \cos(N \cdot 0) & \sin(N \cdot 0) \\ 1 & \cos(d\tau) & \sin(d\tau) & \cdots & \cos(N \cdot d\tau) & \sin(N \cdot d\tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(2\pi) & \sin(2\pi) & \cdots & \cos(2\pi N) & \sin(2\pi N) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 $d\tau$ 为离散的步长。于是, 从单自由度系统变为 m 自由度系统后的方程为

$$\omega \mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (7)$$

其中 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 由非线性函数 $f(x)$ 在时域上离散化得到。两者的映射关系是:

若

$$f_1(x) = x^5, \quad f_2(x) = \cos(x),$$

则

$$\mathbf{F}_1[j] = X[j]^5, \quad \mathbf{F}_2[j] = \cos(X[j]).$$

离散化算子 \mathbf{F} 应该遵循在每个离散点重复操作 f , 不能只对矩阵整体进行操作。这个运算在 MAT-

LAB中可使用矩阵点乘实现。将 m -DOF的系统方程进行移项, 得到自变量为 \mathbf{a} 和 ω 的代数方程

$$\mathbf{L}(\omega, \mathbf{a}) = \omega \mathbf{X}'(\mathbf{a}) - \mathbf{A}\mathbf{X}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(\mathbf{a})) = 0. \quad (8)$$

假设初始迭代值 \mathbf{a}_0 和 ω_0 是上述方程精确解 (ω, \mathbf{a}) 附近的点, 则他们之间的摄动关系为

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \Delta\mathbf{a}, \\ \omega = \omega_0 + \Delta\omega. \end{cases} \quad (9)$$

用此摄动关系代入原系统方程(8)并忽略高阶增量, 可得

$$\mathbf{L}(\omega_0, \mathbf{a}_0) + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{a}} \Delta\mathbf{a} = 0. \quad (10)$$

在忽略高阶增量后, 式(10)可看作关于增量的线性方程, 将它写成雅可比矩阵为

$$[\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_\omega] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{a} \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \mathbf{R}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{J}_a = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{a}}(\omega_0, \mathbf{a}_0) = \omega \frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \mathbf{a}} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{a}}, \\ \mathbf{J}_\omega = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \omega}(\omega_0, \mathbf{a}_0) = \mathbf{X}', \\ \mathbf{R} = -\mathbf{L}(\omega_0, \mathbf{a}_0). \end{cases} \quad (12)$$

由于该方程是一个超定方程组, 可以得到其最小二乘解。

1.2 相位条件

在非线性自激振动系统中, 系统的稳态振动频率 ω 是未知的。因此, 附加一个相位条件决定的方程以增强计算的收敛性。设置一个初始瞬间, 初始瞬间满足: $\dot{x}(t_1) = 0$ 的时刻, 周期响应时程图中对应点是峰值或极值点。那么, 附加的方程为

$$\omega \mathbf{X}'[1] = \omega \sum_{k=1}^N k s^k = 0. \quad (13)$$

将式(9)代入方程(13), 得

$$\omega_0 \sum_{k=1}^N k \Delta s^k + \Delta\omega \sum_{k=1}^N k (s^k)_0 = -\omega_0 \sum_{k=1}^N k (s^k)_0. \quad (14)$$

联立方程(11)和(14)可得

$$\bar{\mathbf{J}}_a \Delta \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{R}}, \quad (15)$$

其中 $n(2N+1)+1$ 维列向量 $\bar{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}, \omega]^T$ 代表所有未知数。假设 τ 被均匀分成 m 个部分, 则 $\bar{\mathbf{J}}_a$ 是一个 $(nm+1) \times [n(2N+1)+1]$ 的雅可比矩阵。

在求得增量 $\Delta \bar{\mathbf{a}}$ 的基础上, 更新谐波系数和频率 $\bar{\mathbf{a}}^{(n)} = \bar{\mathbf{a}}^{(n-1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}}^{(n)}$ 直到

$$\frac{\|\Delta \bar{\mathbf{a}}^{(n)}\|^2}{\|\bar{\mathbf{a}}^{(n)}\|^2} < \epsilon, \quad (16)$$

其中 $\|\cdot\|^2$ 代表求二范数, ϵ 是一个预先给出的容许误差。为得到高精度极限环解, 取 $\epsilon = 10^{-8}$ 。

2 颤振系统模型

2.1 含NES的二元机翼系统

图1为具有三次刚度和弹性刚度的非线性能量阱二自由度机翼系统(Pidaparthi et al., 2018), 质量为 m_s 的附加NES单元位于距弹性轴 d 处, 机翼在俯仰和俯冲两个维度振荡。俯仰角用 α 表示, 机翼头部朝上为正; 俯冲挠度用 h 表示, 向下为正。弹性轴与中弦的距离为 $a_h b$, 质心与弹性轴的距离为 $x_\alpha b$, 机翼相对于弹性轴的旋转半径为 $r_\alpha b$, ω_h 和 ω_α 分别是与俯冲和俯仰单自由度关联的线性弹簧的特征频率。

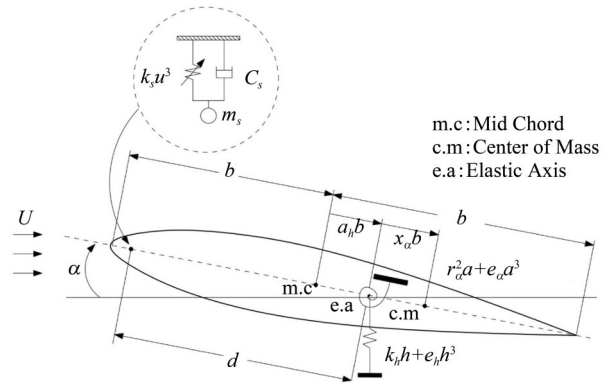


图1 带非线性能量阱的二元机翼模型

Fig. 1 Sketch of the two-dimensional airfoil with NES

引入非标度风速 $Q = \left(\frac{U}{b\omega_\alpha}\right)^2$, 无量纲时间 $t =$

$\omega_\alpha t_1$ (t_1 表示真实时间), 无量纲位移 $h = h_1/b$, 系统在不可压缩流作用下的运动耦合方程(Zhao et al., 1990)为

$$\begin{cases} \mu \ddot{h} + \mu x_\alpha \ddot{\alpha} + \mu (\omega_h/\omega_\alpha)^2 h = -2Q\alpha, \\ \mu x_\alpha \ddot{h} + \mu r_\alpha \ddot{\alpha} + \mu r_\alpha^2 \alpha = (1+2a)Q\alpha. \end{cases} \quad (17)$$

考虑到NES的非线性刚度系数、阻尼刚度系数分别为 k_s 、 c_s , 以及 $\epsilon = m_s/m, C = (k_s b^2)/(m_s \omega_\alpha), \lambda = c_s/(m_s \omega_\alpha), \delta = r_\alpha^2 d$. 在俯仰和俯冲自由度引入粘性阻尼和立方刚度, 修正后方程为

$$\begin{cases} \ddot{h} + x_\alpha \ddot{\alpha} + 0.1\dot{h} + k_h h + e_h h^3 + \frac{\epsilon\lambda}{\sqrt{Q}}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h}) \\ \quad - \frac{\epsilon C}{Q}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h})^3 = -\frac{2Q\alpha}{\mu}, \\ x_\alpha \ddot{h} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + 0.1\dot{\alpha} + r_\alpha^2 \alpha + e_\alpha \alpha^3 + \frac{\delta\epsilon\lambda}{\sqrt{Q}}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h}) \\ \quad - \frac{\delta\epsilon C}{Q}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h})^3 = \frac{(1+2a)Q\alpha}{\mu}, \\ \ddot{z} + \frac{\lambda}{\sqrt{Q}}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h}) - \frac{C}{Q}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h})^3 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

2.2 系统的动力学方程

为了简便,将式(18)写为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{x} = [h, \alpha, z]^T,$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & x_\alpha & 0 \\ x_\alpha & r_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.1 - \frac{\epsilon\lambda}{\sqrt{Q}} & \frac{\epsilon\lambda d}{\sqrt{Q}} & \frac{\epsilon\lambda}{\sqrt{Q}} \\ -\frac{\delta\epsilon\lambda}{\sqrt{Q}} & 0.1 + \frac{\delta\epsilon\lambda d}{\sqrt{Q}} & \frac{\delta\epsilon\lambda}{\sqrt{Q}} \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{Q}} & \frac{\lambda d}{\sqrt{Q}} & \frac{\lambda}{\sqrt{Q}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} e_h h^3 - \frac{\epsilon C}{Q}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h})^3 \\ e_\alpha \alpha^3 - \frac{\delta\epsilon C}{Q}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h})^3 \\ -\frac{C}{Q}(\dot{z} + \delta\dot{\alpha} - \dot{h})^3 \end{bmatrix}.$$

在算例中,取各参数(Pidaparathi et al., 2018)为 $\mu = 20$, $a = -0.1$, $b = 1$, $x_\alpha = 0.25$, $r_\alpha^2 = 0.5$, $k_h = (\omega_h/\omega_\alpha)^2 = 0.2$, $e_h = 5$, $e_\alpha = 0$, $\epsilon = 0.01$, $d = 0.9$, $\delta = 0.45$, $C = 10$, $\lambda = 0.2$.

3 算例分析

3.1 用DFBT求解系统

使用前文所介绍的DFBT方法,将方程(19)写成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}), \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = -\mathbf{M}^{-1}[0, \mathbf{G}(\mathbf{X})]^T,$$

\mathbf{E} 是单位矩阵。将系统的参数代入方程(20),用一组随机数当作初值 $\bar{\mathbf{a}}^{(0)}$ 并按照方程(15)迭代,直到满足方程(16)则停止循环。图2是 $Q = 2.35$ 时数值方法和本文方法得到的相图,数值方法得到的结果用线表示,DFBT得到的结果用点表示。两种方法求得的结果完全一致。

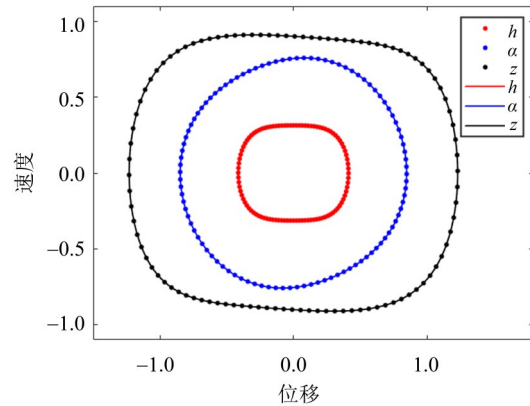


图2 颤振系统的极限环

Fig. 2 Limit cycle of the flutter system

为了进一步定量地研究截断的谐波阶次对精度的影响,我们将DFBT得到的半解析解代回到系统方程,来绘制系统的残差曲线。 $N = 40$ 、 $N = 20$ 和 $N = 10$ 时三个自由度的残差曲线,如图3所示。其中,红线为沉浮方向,蓝线为俯仰方向,黑线为NES位移方向的结果。从图中可以看到, $N = 10$ 时,系统的残差为 10^{-4} 量级;当保留的谐波阶数增长到 $N = 20$ 时,残差减小到 10^{-8} 量级,其中沉浮和俯仰自由度的残差为 10^{-10} 量级。当谐波阶数提高到 $N = 40$ 时,残差进一步减小到 10^{-12} 量级。图3中的结果进一步表明,保留的谐波越多,对应的半解析解会有更高的精度。

3.2 用DFBT延拓快速得到分岔图

为避免重复寻找初值 $\bar{\mathbf{a}}^{(0)}$ 这个步骤,一般采用延拓的方法画分岔图。通常先求解出一个风速下的响应之后向正方向(或负方向)改变风速延拓的方法。选取适当的步长,逐渐增大(或减小)风速,

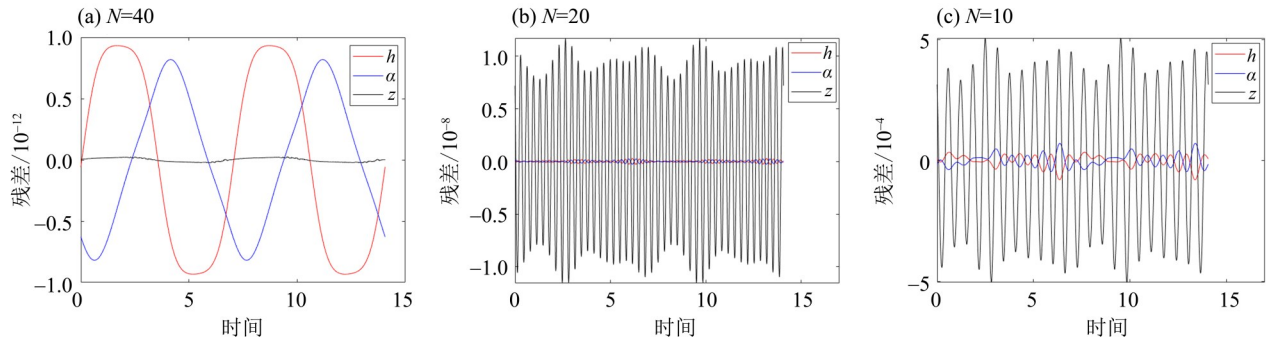


图3 不同谐波数对应的残差曲线

Fig. 3 The residual curves with different order of harmonics

每次求解的时候采用上一个风速求得的周期响应和谐波系数作为初值, 可以有效提高计算效率, 得到分岔图。

当风速为 Q_x 时, 前文所述方法迭代过程中的 $\bar{\mathbf{a}}^{(j)}$ 记为 $\bar{\mathbf{a}}_{Q_x}^{(j)}$, j 为正整数。假设延拓的步长为 ΔQ , 从 Q_1 开始延拓, 先对风速为 Q_1 时的系统进行迭代, 得到满足方程(16)的 $\bar{\mathbf{a}}_{Q_1}^{(j)}$, 记为

$$\frac{\|\Delta \bar{\mathbf{a}}_{Q_1}^{(n)}\|^2}{\|\bar{\mathbf{a}}_{Q_1}^{(n)}\|^2} < \epsilon. \quad (21)$$

则 $Q_2 = Q_1 + \Delta Q$. 对风速为 Q_2 的系统进行迭代时, 直接令 $\bar{\mathbf{a}}_{Q_2}^{(0)} = \bar{\mathbf{a}}_{Q_1}^{(n)}$. 以此类推, 在求解任一风速时都

可以令 $\bar{\mathbf{a}}_{Q_{x+1}}^{(0)} = \bar{\mathbf{a}}_{Q_x}^{(n)}$, 其中 $\frac{\|\Delta \bar{\mathbf{a}}_{Q_x}^{(n)}\|^2}{\|\bar{\mathbf{a}}_{Q_x}^{(n)}\|^2} < \epsilon$. 只要 ΔQ 是一

个较小的数, $\bar{\mathbf{a}}_{Q_{x+1}}^{(0)}$ 在大多情况下都是一个恰当的初值。

在实践中发现, 若风速为 Q_x 附近发生了分岔, 则使用上述延拓方法得到的 $\bar{\mathbf{a}}_{Q_{x+1}}^{(0)}$ 可能无法作为DFBT初值。使用上述延拓方法, 得到 h 、 α 、 z 三个自由度的分岔图, 如图4所示。从图中可以看出, 使用DFBT可以得到亚临界分岔中不稳定的稳态解部分, 而数值方法只能得到稳定解的部分。在稳定解部分, DFBT与数值方法的结果非常吻合。为避免初值对数值求解的影响, 图中的数值方法是采用随机初值计算得到的, 两个方法的结果吻合一致, 表明了DFBT结果的准确性。

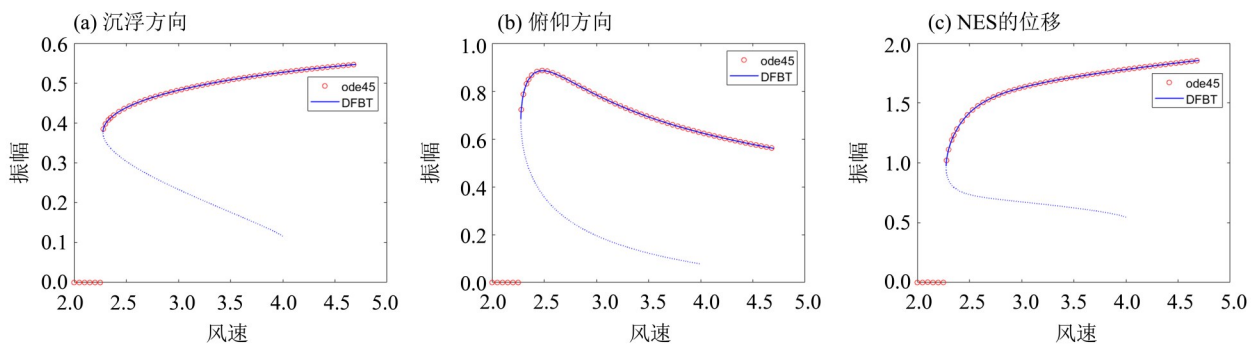


图4 采用DFBT得到系统分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagram of system obtained by DFBT

3.3 计算效率与稳定性分析

为比较DFBT与其他数值方法的效率, 求解得到风速在区间[2.35, 4.7]的周期响应, 如图5所示。图5(a)的步长 $dt = 0.02\pi$, 总时长 $T = 800\pi$; 图5(b)的步长 $dt = 0.1\pi$, 总时长 $T = 100\pi$. 两种方法的延拓步长、容许误差(精度)以及对应参数下的

计算时间如表1所示。

从表1和图5可以看出, 数值方法在求解取点较多较密时, 其效率远不如DFBT; 而当数值方法减少取点数量以提高求解效率时, 分岔图在风速 Q 为[4, 4.5]的区间出现了较大的误差。

前面提到, DFBT相比其他数值法的优势在于

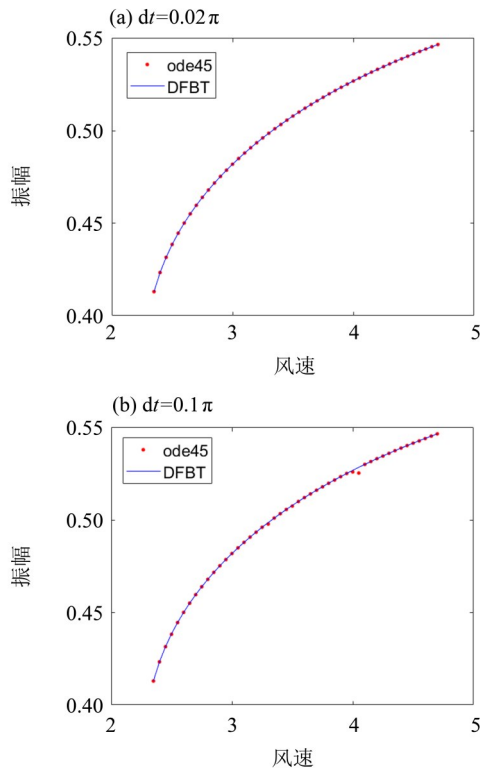


图5 DFBT和数值方法的分岔图

Fig. 5 The bifurcation diagram obtained by numerical method and DFBT

表1 DFBT与数值方法的求解时间

Table 1 Solving time of DFBT and numerical method

| 方法 | dt/s | T/s | 延拓 步长 | 容许 误差 | 计算 时间/s |
|------|-----------|----------|----------|-----------|------------|
| DFBT | - | - | 0.05 | 10^{-8} | 56.4 |
| 数值方法 | 0.02π | 800π | 0.05 | 10^{-8} | 523.9 |
| 数值方法 | 0.04π | 200π | 0.05 | 10^{-8} | 174.8 |
| 数值方法 | 0.1π | 100π | 0.05 | 10^{-8} | 64.9 |

其可以得到亚临界分岔中不稳定的稳态解部分,如图4中虚线部分所示。为了验证这一点,使用Floquet理论对图4中各点所对应的解进行稳定性分析。先将DFBT求出的谐波系数组装成近似的解析解,即对某特定风速下的系统使用Floquet稳定性分析。若特征值大于1,则说明解不稳定;反之,特征值小于1证明解是稳定的。对风速 Q 为 $[2.28, 4.28]$ 的区间(图4中的上半支)使用Floquet理论,取横纵坐标为特征值的实部和虚部,得到图6(b),可以看出这段的解是稳定解。再取风速 Q 为 $[4.03, 2.28]$ 的区间(图4中的下半支)使用Floquet理论,两者的结果如图6(a)所示。其中,稳定解对应的点用红色表示,非稳定解对应的点用黑

色表示。非稳定部分对应分岔图(图4)中的虚线部分(即下半支部分),说明系统出现的分岔与亚临界分岔现象相符。

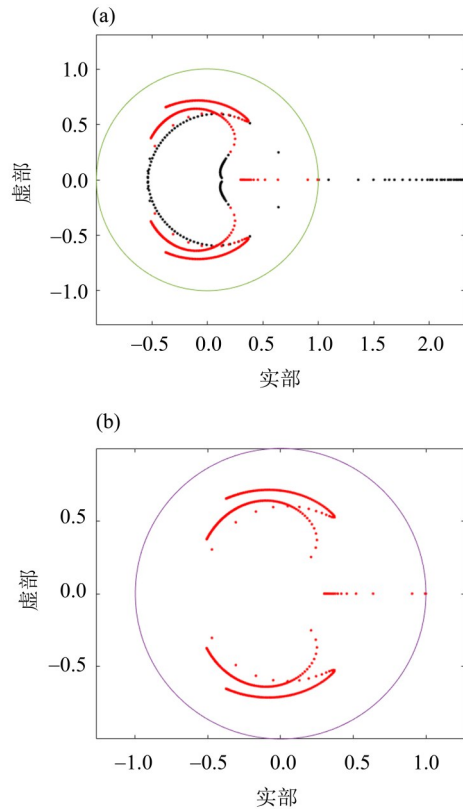


图6 DFBT方法获得的极限环的Floquet乘子

Fig. 6 Floquet multiplier of the limit cycle obtained by DFBT method

4 结 论

本文运用时域描述函数法求解具有非线性能量阱的二元机翼系统。使用截断傅里叶级数的形式描述目标解后,在时域上基于点平衡推导出一系列平衡方程,并引入Tikhonov正则化迭代求解傅里叶级数。通过对含NES的二元机翼系统的求解,得到了以下结论:

- (1)与数值方法对比,结果高度吻合,本文方法具有有效性;
- (2)与数值方法对比,求得高精度解的用时更短,本文方法具有高效性;
- (3)通过延拓算法,本文方法可以快速求得亚临界分岔曲线;
- (4)数值方法只能求得稳定的稳态解,本文方法可以同时得到稳定或不稳定的极限环,适用于具有复杂非线性特性的分岔曲线的跟踪。

参考文献:

- 刘广, 刘济科, 吕中荣, 2018. 基于时域响应灵敏度分析的非线性系统参数识别[J]. 振动与冲击, 37(21): 213-219.
- 王德亮, 刘济科, 刘广, 2023. 基于Tikhonov正则化改进的IHB法求解Mathieu-Duffing系统多重解[J]. 中山大学学报(自然科学版)(中英文), 62(5): 78-84.
- CHEN Y M, LIU J K, MENG G, 2012. Incremental harmonic balance method for nonlinear flutter of an airfoil with uncertain-but-bounded parameters[J]. Appl Math Model, 36(2): 657-667.
- CLARKE M J, HANCOCK G J, 1990. A study of incremental-iterative strategies for non-linear analyses [J]. Int J Numer Methods Eng, 29(7): 1365-1391.
- GUO H, CHEN Y, YANG T, 2013. Limit cycle oscillation suppression of 2-DOF airfoil using nonlinear energy sink [J]. Appl Math Mech-Engled, 34(10): 1277-1290.
- GUO H, CAO S, YANG T, et al, 2018. Aeroelastic suppression of an airfoil with control surface using nonlinear energy sink[J]. Nonlinear Dyn, 94: 857-872.
- HALL K C, EKICI K, THOMAS J P, et al, 2013. Harmonic balance methods applied to computational fluid dynamics problems[J]. Int J Comput Fluid Dyn, 27(2): 52-67.
- HE L S, SEAID M, 2016. A runge-kutta-Chebyshev SPH algorithm for elastodynamics [J]. Acta Mech, 227(7): 1813-1835.
- HUANG J L, ZHU W D, 2017. A new incremental harmonic balance method with two time scales for quasi-periodic motions of an axially moving beam with internal resonance under single-tone external excitation[J]. J Vib Acoustics, 139(2): 021010.
- LIAO S J, SHERIF S A, 2004. Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method[J]. Appl Mech Rev, 57(5): B25-B26.
- LIU J K, CHEN F X, CHEN Y M, 2012. Bifurcation analysis of aeroelastic systems with hysteresis by incremental harmonic balance method [J]. Appl Math Comput, 219(5): 2398-2411.
- LIU G, LIU J K, WANG L, et al, 2022. Time-domain minimum residual method combined with energy balance for nonlinear conservative systems[J]. Mech Syst Signal Process, 170: 108818.
- MA K, DU J T, LIU Y, 2023. Nonlinear dynamic behavior analysis of closed-loop self-excited crankshaft model using improved Newmark- β method [J]. Nonlinear Dyn, 111(6): 5107-5124.
- PIDAPARTHI B, MISSOUM S, 2018. Optimization of nonlinear energy sinks for the mitigation of limit cycle oscillations [C]// Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. Atlanta, Georgia Reston, Virginia: AIAA:3569.
- VAKAKIS A F, 2001. Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems [J]. J Vib Acoustics, 123(3): 324-332.
- YANG F, SEDAGHATI R, ESMAILZADEH E, 2022. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: A state-of-the-art review [J]. J Vib Control, 28(7/8): 812-836.
- ZHAO L C, YANG Z C, 1990. Chaotic motions of an airfoil with non-linear stiffness in incompressible flow [J]. J Sound Vib, 138(2): 245-254.
- ZHENG Z C, LU Z R, CHEN Y M, et al, 2022. A modified incremental harmonic balance method combined with Tikhonov regularization for periodic motion of nonlinear system[J]. J Appl Mech, 89(2): 021001.
- ZHENG Z C, LU Z R, LIU G, et al, 2023. Describing function method with pointwise balancing in time domain for periodic responses of non-smooth self-excited system [J]. Acta Mech, 234(7): 2763-2782.
- ZHONG W X, CAI Z Q, 2000. Precise integration method for LQG optimal measurement feedback control problem[J]. Appl Math Mech, 21: 1417-1422.

(责任编辑 王海蓉)